

---

## Exercícios Resolvidos de Física Básica

**Jason Alfredo Carlson Gallas**, professor titular de física teórica,  
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

**Universidade Federal da Paraíba (João Pessoa, Brasil)**  
Departamento de Física



Baseados na **SEXTA** edição do “Fundamentos de Física”, Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: <http://www.fisica.ufpb.br/~jgallas>

---

## Contents

|                                                                 |          |
|-----------------------------------------------------------------|----------|
| <b>35 Oscilações Eletromagnéticas</b>                           | <b>2</b> |
| 35.1 Questões . . . . .                                         | 2        |
| 35.2 Problemas e Exercícios . . . . .                           | 2        |
| 35.2.1 Oscilações $LC$ : Estudo Qualitativo – (1/6) . . . . .   | 2        |
| 35.2.2 Analogia com o MHS – (7/8) . . . . .                     | 3        |
| 35.2.3 Oscilações $LC$ : Estudo Quantitativo – (9/30) . . . . . | 3        |
| 35.2.4 Oscilações Amortecidas num RLC – (31/36) . . . . .       | 6        |

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para [jasongallas @ yahoo.com](mailto:jasongallas@yahoo.com) (sem “br” no final...)  
(listaq3.tex)

## 35 Oscilações Eletromagnéticas

### 35.1 Questões

**Q 35-1.** Por que o circuito  $LC$  da Fig. 35-1 não pára simplesmente de oscilar no instante em que o capacitor fica completamente descarregado?

► É que apesar de termos  $q = 0$ , temos simultaneamente  $dq/dt \neq 0$ . A situação, portanto, é análoga a de um pêndulo que passa por um extremo ou da energia potencial [quando  $x = 0$  ou  $x = x_{\max}$  mas  $dx/dt \neq 0$ ] ou da energia cinética [quando  $v = 0$  ou  $v = v_{\max}$  mas  $dv/dt \neq 0$ ].

As situações não correspondem a equilíbrios estáveis. Note a ênfase na palavra *extremo* e que tal palavra implica mais coisas do que as acima rapidamente mencionadas...

### 35.2 Problemas e Exercícios

#### 35.2.1 Oscilações $LC$ : Estudo Qualitativo – (1/6)

**E 35-1.** Qual é a capacitância de um circuito  $LC$ , sabendo-se que a carga máxima do capacitor é  $1.60 \mu\text{C}$  e a energia total é  $140 \mu\text{J}$ ?

► Use a fórmula  $U = Q^2/(2C)$  para obter

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{(1.60 \times 10^{-6})^2}{2(140 \times 10^{-6})} = 9.14 \times 10^{-9} \text{ F.}$$

**E 35-2.** Num circuito  $LC$ , um indutor de  $1.50 \text{ mH}$  armazena uma energia máxima de  $10 \mu\text{J}$ . Qual é o pico de corrente?

► Use  $U = LI^2/2$  para obter

$$I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2(10.0 \times 10^{-6})}{1.50 \times 10^{-3}}} = 0.115 \text{ A.}$$

**E 35-3.** Num circuito  $LC$  oscilante  $L = 1.10 \text{ mH}$  e  $C = 4.0 \mu\text{F}$ . A carga máxima do capacitor vale  $3.0 \mu\text{C}$ . Determine a corrente máxima.

► Das igualdades  $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}Q^2/C$  temos

$$I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = \frac{3.0 \times 10^{-6}}{\sqrt{(1.10 \times 10^{-3})(4.0 \times 10^{-6})}} = 4.52 \times 10^{-2} \text{ A.}$$

**E 35-4.** Um circuito  $LC$  consiste num indutor de  $75 \text{ mH}$  e num capacitor de  $3.6 \mu\text{F}$ . Sabendo-se que a carga máxima do capacitor é de  $2.9 \mu\text{C}$ , **(a)** qual a energia total no circuito e **(b)** qual é a corrente máxima?

► **(a)**

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2.90 \times 10^{-6}}{2(3.6 \times 10^{-6})} = 1.17 \times 10^{-6} \text{ J;}$$

**(b)**

$$I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2(1.17 \times 10^{-6})}{75 \times 10^{-3}}} = 5.59 \times 10^{-3} \text{ A.}$$

**E 35-5.** Para um certo circuito  $LC$  a energia total é transformada de energia elétrica no capacitor em energia magnética no indutor em  $1.5 \mu\text{s}$ . **(a)** Qual é o período de oscilação? **(b)** Qual a frequência de oscilação? **(c)** Num certo instante, a energia magnética é máxima. Quanto tempo depois será máxima novamente?

► **(a)**  $T = 4 \times 1.50 \mu\text{s} = 6.0 \mu\text{s}$ .

**(b)**  $f = T^{-1} = (6.0 \times 10^{-6})^{-1} = 1.67 \times 10^5 \text{ Hz}$ .

**(c)** Após meio período, ou seja  $3.0 \mu\text{s}$ .

**P 35-6.** A frequência de oscilação de um certo circuito  $LC$  é  $2.00 \text{ kHz}$  (corrija o erro na *tradução* do livro-texto: em vez de  $200$  deve ser  $2.00 \text{ kHz}$ ). No instante  $t = 0$ , a placa A do capacitor tem carga positiva máxima. Em quais instantes  $t > 0$  **(a)** a placa A terá novamente carga positiva máxima, **(b)** a outra placa do capacitor terá carga positiva máxima e **(c)** o indutor terá campo magnético máximo?

► Considerando-se a dinâmica mostrada na Fig. 35-1 e usando  $T = 2 \times 10^3 = 2000 \text{ Hz}$  encontramos:

**(a)** A carga será máxima e positiva na placa A para

$$t_a = nT = \frac{n}{f} = \frac{n}{2000} = n (500 \mu\text{s}),$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$

**(b)** Primeiramente, observe que é preciso esperar-se meio período para que a carga atinja seu valor máximo positivo na outra placa pela primeira vez. Depois de

atingi-lo, ela volta a repetir-se a cada período que passa, ou seja, para

$$t_b = \frac{T}{2} + nT = \frac{1+2n}{2 \times 2000} = (2n+1)(2.5 \mu\text{s}),$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$

(c) É necessário  $T/4$  para que o campo magnético no indutor atinja seu valor máximo pela primeira vez, passando então a repetir-se a cada meio período:

$$t_c = \frac{T}{4} + \frac{nT}{2} = \frac{t_b}{2} = (2n+1)(1.25 \mu\text{s}),$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$

### 35.2.2 Analogia com o MHS – (7/8)

**P 35-7.** Um bloco de 0.50 kg oscila preso a uma mola que, quando distendida de 2.0 mm, a partir do equilíbrio, tem uma força restauradora de 8.0 N. (a) Qual é a frequência angular de oscilação? (b) Qual é o período de oscilação? (c) Qual será a capacitância do sistema LC análogo, se a indutância  $L$  valer 5.0 H?

► (a)

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F/x}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{8.0}{(2.0 \times 10^{-3})(0.50)}} \\ &= 89 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

(b)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{89} = 7.0 \times 10^{-2} \text{ s}.$$

(c) Usando a definição de  $\omega = (LC)^{-1/2}$ , temos

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(89)^2(5.0)} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ F}.$$

**P 35-8.** Um circuito  $LC$  com um indutor de 1.25 H possui uma energia de 5.7  $\mu\text{J}$ . A carga máxima armazenada no capacitor é igual a 175  $\mu\text{C}$ . Determine (a) a massa, (b) a constante da mola, (c) o deslocamento máximo e (d) a velocidade escalar máxima para o sistema mecânico análogo.

► (a) Como a massa  $m$  corresponde a indutância  $L$ , temos  $m = 1.25 \text{ Kg}$ .

(b) Temos  $k = 1/C$ . Como  $C = Q^2/(2U) = 2.69 \times 10^{-3} \text{ F}$ , segue que  $k = 1/C = 372 \text{ N/m}$ .

(c) O deslocamento máximo  $x_m$  corresponde à carga máxima, de modo que

$$x_m = 175 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

(d) A velocidade máxima  $v_m$  corresponde à corrente máxima. A corrente máxima é

$$\begin{aligned}I &= Q\omega = \frac{Q}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{175 \times 10^{-6}}{\sqrt{(1.25)(2.69 \times 10^{-3})}} \\ &= 3.02 \times 10^{-3} \text{ A}.\end{aligned}$$

Portanto

$$v_m = 3.02 \times 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Alternativamente, podemos também usar a equação  $U_B = LI^2/2$ , para obter

$$I = \sqrt{\frac{2U_B}{L}},$$

que fornece o mesmo resultado numérico acima.

### 35.2.3 Oscilações $LC$ : Estudo Quantitativo – (9/30)

**E 35-9.** Os osciladores  $LC$  são usados em circuitos ligados a alto-falantes para criar alguns sons da música eletrônica. Que indutância deve ser usada com um capacitor de 6.7  $\mu\text{F}$  para produzir uma frequência de 10 kHz, aproximadamente o meio da faixa audível?

► Use  $f = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$  para obter

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 (10 \times 10^3)^2 (6.7 \times 10^{-6})} \\ &= 3.8 \times 10^{-5} \text{ H}.\end{aligned}$$

#### **E 35-10.**

► Use  $f = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$  para obter

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 (3.5 \times 10^3)^2 (1.3 \times 10^{-3})} \\ &= 1.59 \times 10^{-6} \text{ F}.\end{aligned}$$

#### **E 35-11.**

Num circuito  $LC$  com  $L = 50 \text{ mH}$  e  $C = 4 \mu\text{F}$ , a corrente é inicialmente máxima. Quanto tempo depois o capacitor estará com carga plena pela primeira vez?

► Sendo  $T$  o período de oscilação do circuito, o tempo solicitado será  $t = T/4$ . O período é dado por  $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{LC}$ , onde  $\omega$  é a frequência angular de oscilação,  $L$  é a indutância, e  $C$  é a capacitância. Portanto

$$\begin{aligned} t = \frac{T}{4} &= \frac{2\pi\sqrt{LC}}{4} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{(0.05)(4 \times 10^{-6})}}{4} \\ &= 7 \times 10^{-4} \text{ s.} \end{aligned}$$

**E 35-12.**

► Com a chave  $S_1$  fechada e as outras abertas, o que temos é um circuito  $RC$  com constante de tempo  $\tau_C = RC$ . Quando  $S_2$  é fechada e as outras são abertas o capacitor estará fora do circuito e o que sobra é um circuito  $RL$  com constante de tempo  $\tau_L = L/R$ . Quando  $S_3$  está fechada e as outras estão abertas o resistor está fora do circuito e o que sobra é um circuito que oscila com período  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

Substituindo-se  $L = R\tau_L$  e  $C = \tau_C/R$  obtemos facilmente que

$$T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}.$$

**E 35-13.** Deduza a equação diferencial de um circuito LC (Eq. 35-10), usando a leis das malhas.

► Aplicando a lei das malhas a um circuito LC encontramos

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Como  $i = dq/dt$  e, portanto,  $di/dt = d^2q/dt^2$ , vemos que a igualdade mais à direita fornece a equação pedida:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

**E 35-14.**

► Aplicando a lei das malhas a todo o circuito temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{total}} &= \mathcal{E}_{L_1} + \mathcal{E}_{C_1} + \mathcal{E}_{R_1} + \dots \\ &= \sum_k (\mathcal{E}_{L_k} + \mathcal{E}_{C_k} + \mathcal{E}_{R_k}) \\ &= \sum_k \left( L_k \frac{di}{dt} + \frac{q}{C_k} + iR_k \right) \end{aligned}$$

$$= L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + iR = 0,$$

onde

$$L = \sum_k L_k, \quad \frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}, \quad R = \sum_k R_k.$$

De fato, a associação mostrada na Fig. 35-11a é equivalente a da Fig. 35-11b.

**P 35-18.**

► (a) Após ser movida para a posição  $b$  temos um circuito  $LC$  cuja frequência angular é  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  e a frequência é

$$\begin{aligned} f = \frac{\omega}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(54 \times 10^{-3})(6.2 \times 10^{-6})}} \\ &= \frac{1728.2528}{2\pi} \\ &= 275 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

(b) No instante do fechamento da chave a corrente é zero, sendo que o capacitor está carregado com uma tensão  $V = 34 \text{ V}$ . Portanto a carga máxima no capacitor é  $Q = VC = 34 \times 6.2 \times 10^{-6} = 2.11 \times 10^{-4} \text{ C}$ . A amplitude da corrente é, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I = \omega Q &= 2\pi f Q \\ &= 2\pi(275)(2.11 \times 10^{-4}) \\ &= 0.365 \text{ A.} \end{aligned}$$

**P 35-21.**

► (a) Em qualquer instante, a energia total  $U$  no circuito é a soma da energia  $U_E$  no campo elétrico do capacitor e a energia  $U_B$  no campo magnético do indutor. Quando  $U_E = 0.5 U_B$ , temos  $U_B = 2 U_E$  e  $U = U_E + U_B = 3 U_E$ . A energia  $U_E$  é dada por  $q^2/(2C)$ , onde  $q$  é a carga no capacitor e  $C$  é a capacitância. A energia total  $U$  é dada por  $Q^2/(2C)$ , onde  $Q$  é a carga máxima no capacitor, de modo que  $Q^2/(2C) = 3 q^2/(2C)$  ou seja  $q = Q/\sqrt{3} \simeq 0.577 Q$ .

(b) Se o capacitor está totalmente carregado para  $t = 0$  então sua carga é dada por  $q(t) = Q \cos(\omega t)$  onde  $\omega$  é a frequência da oscilação. A condição  $q = 0.577 Q$  é satisfeita quando  $\cos(\omega t) = 0.577$ , ou seja, para  $\omega t = 0.955$  radianos. Como  $\omega = 2\pi/T$ , onde  $T$  é o período de oscilação,  $t = 0.955 T/(2\pi) = 0.152 T$ .

**P 35-24.**

► (a) Como sabemos que  $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , quanto menor  $C$ , maior será  $f$ . Portanto,  $f_{\max} = 1/(2\pi\sqrt{LC_{\min}})$ , e  $f_{\min} = 1/(2\pi\sqrt{LC_{\max}})$ , fornecendo

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{\sqrt{C_{\max}}}{\sqrt{C_{\min}}} = \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{10}} = 6.024 \simeq 6.$$

(b) Queremos escolher a capacitância  $C$  adicional de modo que a razão das frequências seja

$$r = \frac{1.60 \text{ MHz}}{0.54 \text{ MHz}} = 2.96.$$

Como a capacitância  $C$  adicional é colocada em *paralelo* ao capacitor variável, sua capacitância soma-se à da capacitância de sintonia, ou seja

$$\frac{\sqrt{C+365}}{\sqrt{C+10}} = 2.96,$$

cujas solução é

$$C = \frac{365 - (2.96)^2(10)}{(2.96)^2 - 1} = 36 \text{ pF}.$$

Para termos a menor frequência devemos usar  $C = 365 + 36 = 401 \text{ pF}$  e  $f = 0.54 \text{ MHz}$ . Portanto

$$L = \frac{1}{(2\pi)^2 C f^2} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ H}.$$

**P 35-25.**

► (a)

$$\begin{aligned} U &= U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{i^2 L}{2} \\ &= \frac{(3.8 \times 10^{-6})^2}{2(7.8 \times 10^{-6})} + \frac{(9.2 \times 10^{-3})^2(25 \times 10^{-3})}{2} \\ &= 1.98 \times 10^{-6} \text{ J}. \end{aligned}$$

(b) A carga  $Q$  máxima pode ser obtida do valor *total* da energia, assim:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{2CU} = \sqrt{2(7.8 \times 10^{-6})(1.98 \times 10^{-6})} \\ &= 5.56 \times 10^{-6} \text{ Coulombs}. \end{aligned}$$

(c) Analogamente, a corrente máxima  $I$  também é obtida do valor *total* da energia:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2(1.98 \times 10^{-6})}{25 \times 10^{-3}}} \\ &= 1.26 \times 10^{-2} \text{ Ampères}. \end{aligned}$$

(d) Chamando-se de  $q_0$  a carga no capacitor em  $t = 0$ , temos  $q_0 = Q \cos \phi$  e

$$\begin{aligned} \phi &= \cos^{-1} \left( \frac{q_0}{Q} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{3.80 \times 10^{-6}}{5.56 \times 10^{-6}} \right) \\ &= \pm 46.9^\circ. \end{aligned}$$

Para  $\phi = +46.9^\circ$  a carga no capacitor está decrescendo, enquanto que para  $\phi = -46.9^\circ$  ela está crescendo. Verifica-se isto calculando-se a derivada de  $q$  em relação ao tempo e computando-a para  $t = 0$ . Obtem-se  $-\omega Q \sin \phi$ . Queremos que esta quantidade seja positiva o que nos leva a escolher  $\phi = -46.9^\circ$ , pois então  $\sin(-46.9^\circ) < 0$ .

(e) Neste caso a derivada deve ser negativa. Portanto devemos tomar  $\phi = +46.9^\circ$ .

**P 35-26.**

► (a) A carga é dada por  $q(t) = Q \sin(\omega t)$ , onde  $Q$  é a carga máxima no capacitor e  $\omega$  é a frequência da oscilação. Escolheu-se a função seno para que tenhamos  $q = 0$  no instante  $t = 0$ . Assim sendo, a corrente é

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega Q \cos(\omega t)$$

e para  $t = 0$  temos  $I = \omega Q$ . Como  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , encontramos

$$\begin{aligned} Q &= I \sqrt{LC} \\ &= 2 \sqrt{(3 \times 10^{-3})(2.7 \times 10^{-6})} \\ &= 1.80 \times 10^{-4} \text{ Coulombs}. \end{aligned}$$

(b) A energia armazenada no capacitor é

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2 \sin^2(\omega t)}{2C}$$

e sua taxa de variação é

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{Q^2 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{C}.$$

Usando a identidade  $\cos(A) \sin(A) = \frac{1}{2} \sin(2A)$  obtemos

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{\omega Q^2}{2C} \sin(2\omega t).$$

A maior variação ocorre quando  $\sin(2\omega t) = 1$ , ou seja, para  $2\omega t = \pi/2$  radianos, resultado que nos fornece

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi T}{4(2\pi)} = \frac{T}{8},$$

onde  $T$  é o período da oscilação, e usamos o fato que  $\omega = 2\pi/T$ .

(c) Substitua  $\omega = 2\pi/T$  e  $\sin(2\omega t) = 1$  na expressão de  $dU_e/dt$  obtendo assim:

$$\left(\frac{dU_e}{dt}\right)_{\max} = \frac{2\pi Q^2}{2TC} = \frac{\pi Q^2}{TC}.$$

Como  $T = 2\pi\sqrt{LC} = 5.655 \times 10^{-4}$  s, encontramos

$$\left(\frac{dU_e}{dt}\right)_{\max} = 66.7 \text{ Watts},$$

um valor *positivo*, indicando que a energia no capacitor está realmente aumentando para  $t = T/8$ .

#### P 35-30\*.

► A energia originalmente no capacitor de  $900 \mu\text{F}$  é

$$\frac{1}{2}C_{900}V^2 = \frac{1}{2}(900 \times 10^{-6})(100)^2 = 4.5 \text{ J}.$$

A energia necessária para se carregar o capacitor de  $100 \mu\text{F}$  a  $300 \text{ V}$  é

$$\frac{1}{2}C_{100}V^2 = \frac{1}{2}(100 \times 10^{-6})(300)^2 = 4.5 \text{ J}.$$

Portanto, vemos que a energia originalmente no capacitor de  $900 \mu\text{F}$  deve ser transferida para o capacitor de  $100 \mu\text{F}$ , o que se pode fazer facilmente armazenando-a temporariamente no indutor.

Para tanto, deixe a chave  $S_1$  aberta e feche a chave  $S_2$ , esperando até que o capacitor de  $900 \mu\text{F}$  esteja completamente descarregado, com a corrente na malha à direita sendo então máxima. Tal máximo ocorre num quarto do período de oscilação. Como

$$T_{900} = 2\pi\sqrt{LC_{900}} = 0.596 \text{ s},$$

precisamos portanto esperar  $(0.596)/4 = 0.149$  segundos. Neste instante, feche  $S_1$  e abra  $S_2$  de modo que a corrente esteja agora na malha à esquerda. Espere agora um quarto do período de oscilação do circuito  $LC$  à esquerda e abra a chave  $S_1$ . Tal período é

$$T_{100} = 2\pi\sqrt{LC_{100}} = 0.199 \text{ s},$$

indicando ser preciso manter-se  $S_1$  fechada durante  $(0.199)/4 = 0.0497$  segundos antes de abri-la novamente.

### 35.2.4 Oscilações Amortecidas num RLC – (31/36)

#### E 35-31.

► O tempo necessário para 50 ciclos é

$$t = 50 T = 50 \frac{2\pi}{\omega} = 50 \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{LC} = 0.5104 \text{ s}.$$

A carga máxima no capacitor decai de acordo com

$$q_{\max} = Q e^{-Rt/(2L)},$$

onde  $Q$  é a carga em  $t = 0$  e  $R$  é a resistência do circuito. Portanto

$$\begin{aligned} R &= -\frac{2L}{t} \ln \left( \frac{q_{\max}}{Q} \right) \\ &= -\frac{2(220 \times 10^{-3})}{0.5104} \ln(0.99) \\ &= 8.66 \times 10^{-3} \Omega. \end{aligned}$$

#### P 35-33.

► Como a energia máxima no capacitor em cada ciclo é dada por  $q_{\max}^2/(2C)$ , onde  $q_{\max}$  é a carga máxima carga a  $C$  é a capacitância, deseja-se o instante de tempo para o qual

$$\frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2C},$$

o que significa que  $q_{\max} = Q/\sqrt{2}$ .

Como temos que

$$q_{\max} = Q e^{-Rt/(2L)},$$

onde  $R$  é a resistência e  $L$  a indutância do circuito. Resolvendo-se para  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{2L}{R} \ln \left( \frac{q_{\max}}{Q} \right) \\ &= -\frac{2L}{R} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{L}{R} \ln 2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que  $\ln(1/\sqrt{2}) = -\ln \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \ln 2$ .

#### P 35-36\*.

Num circuito  $LC$  amortecido, mostre que a fração da energia perdida por ciclo de oscilação,  $\Delta U/U$ , é dada

com boa aproximação por  $2\pi R/(\omega L)$ . A grandeza  $\omega L/R$  é freqüentemente denominada de *fator de qualidade* “ $Q$ ” do circuito ( $Q$ , por ser a letra inicial da palavra ‘qualidade’). Um circuito de “alto  $Q$ ” possui resistência baixa e uma perda relativa também baixa de energia por ciclo ( $= 2\pi/Q$ ).

► Seja  $t$  um instante de tempo no qual o capacitor esteja carregado completamente num ciclo qualquer e seja  $q_{\max 1}$  a carga então no capacitor. A energia no capacitor neste mesmo instante é

$$U(t) = \frac{q_{\max 1}^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L},$$

onde usamos o fato que  $q_{\max 1} = Q e^{-Rt/(2L)}$ , sendo  $Q$  a carga para  $t = 0$ .

Um ciclo mais tarde a carga máxima é

$$q_{\max 2} = Q e^{-R(t+T)/(2L)}$$

e a energia é

$$U(t+T) = \frac{q_{\max 2}^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-R(t+T)/L},$$

onde  $T$  é o período da oscilação. A perda fracional da energia por ciclo é, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= \frac{U(t+T) - U(t)}{U(t)} \\ &= \frac{e^{-Rt/L} - e^{-R(t+T)/L}}{e^{-Rt/L}} \\ &= 1 - e^{-RT/L}. \end{aligned}$$

Supondo ser  $RT/L \ll 1$  (a resistência é pequena) e usando o teorema binomial [“expansão da exponencial”, apêndice G, pag. 334] encontramos facilmente que

$$e^{-RT/L} \simeq 1 - \frac{RT}{L}.$$

Substituindo-se  $T$  por  $2\pi/\omega$ , onde  $\omega$  é a freqüência angular da oscilação, temos

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 1 - \left(1 - \frac{RT}{L}\right) = \frac{RT}{L} = \frac{2\pi R}{\omega L}.$$