SUOMALAISEN TIEDEAKATEMIAN TOIMITUKSIA
ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ

SARJA — SERIES A

I. MATHEMATICA

256

ITERATION DER REELLEN POLYNOME ZWEITEN GRADES

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1958
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

1. Einleitung

1. Es sei

$$x_1 = ax^2 + 2bx + c \tag{1,1}$$

ein Polynom zweiten Grades mit reellen Koeffizienten. Vermittels einer Substitution der Form

$$x = \alpha y + \beta\,, \quad x_1 = \alpha y_1 + \beta$$

kann (1,1) in die einfache Form

$$y_1 = y^2 + p \tag{1,2}$$

transformiert werden, wo p die reelle Grösse

$$p = ac - b^2 + b$$

bezeichnet. Die Iteration des Polynoms (1,1) wird damit auf die Iteration des transformierten Polynoms (1,2) zurückgeführt.

Die ersten Iterierten von (1,2) haben den Ausdruck

$$y_2 = (y^2 + p)^2 + p\,, \quad y_3 = \left\{(y^2 + p)^2 + p\right\}^2 + p\,. \tag{1,3}$$

Allgemein hat y_n einen Ausdruck von der Form

$$y_n = y^{2^n} + \ldots + G_n(p)\,, \tag{1,4}$$

wo $G_n(p)$ ein Polynom von p vom Grade 2^{n-1} bezeichnet. Für die ersten Werte von n hat $G_n(p)$ den Ausdruck

$$G_1(p) = p\,, \quad G_2(p) = p^2 + p\,, \quad G_3(p) = (p^2 + p)^2 + p\,. \tag{1,5}$$

Allgemein gilt die Rekursionsformel

$$G_{n+1}(p) = G_n^2(p) + p\,. \tag{1,6}$$

Die Iteration von (1,2) bei beliebigen komplexen Werten der Variablen y ist eine Aufgabe der Funktionentheorie. Als Hauptproblem hat man die Bestimmung des zum unendlich fernen Punkt gehörigen Attraktionsgebietes, also der Menge derjenigen Punkte, für welche

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \infty\,. \tag{1,7}$$

Nach der allgemeinen Theorie besteht der Rand von D aus einer im allgemeinen unendlichen Menge von Jordankurven, die sich auch auf Punkte reduzieren können. Wann der letztere Fall auftritt, ist eine Frage, die in der vorliegenden Arbeit allgemein behandelt wird.

Nachdem wir den Fall $p \leqq -2$ schon früher erledigt haben, bleiben die zum Intervall $p > -2$ gehörigen Werte übrig. Unsere Methode führt zur Lösung der Aufgabe u.a. für $p \geqq 1$ sowie für einen Teilintervall von $(-2, 1)$, während ihre Anwendung auf die Restintervalle bis auf weiteres unüberwindlichen Schwierigkeiten begegnet.

2. Die Fixpunkte der Abbildung

2. Das Polynom (1,2) hat im allgemeinen drei Fixpunkte, nämlich die Wurzeln

$$q_1\,, q_2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - p} \tag{2,1}$$

der Gleichung

$$q^2 + p = q \tag{2,2}$$

und den unendlich fernen Punkt. Die endlichen Fixpunkte sind
reell und verschieden für $p < \frac{1}{4}$,
reell und einender gleich für $p = \frac{1}{4}$ und
konjugiert komplex für $p > \frac{1}{4}$.
Aus dem Ausdruck

$$s_\nu = 2q_\nu = 1 \pm \sqrt{1 - 4p} \quad , \quad (\nu = 1, 2) \tag{2,3}$$

des zum Fixpunkt q_ν gehörigen Multiplikators, der Ableitung von y_1, geht folgendes hervor:

I. Fall $p < \frac{1}{4}$. Jetzt ist $|s_1| > 1$ und also q_1 repulsiv.
Für $-\frac{3}{4} < p < \frac{1}{4}$ ist $|s_2| < 1$ und somit q_2 attraktiv,
für $p < -\frac{3}{4}$ ist $|s_2| > 1$ und somit q_2 repulsiv,
für $p = -\frac{3}{4}$ ist $|s_2| = 1$ und somit q_2 indifferent.

II. Fall $p = \frac{1}{4}$. Jetzt ist $s_1 = s_2 = 1$ und somit $q_1 = q_2$ indifferent.

III. Fall $p > \frac{1}{4}$. Jetzt ist $|s_\nu| > 1$, $(\nu = 1, 2)$, und die beiden Fixpunkte $q_1\,, q_2$ sind also repulsiv.

In allen Fällen ist der unendlich ferne Punkt ein attraktiver Fixpunkt.

Im Hinblick auf die späteren Anwendungen bemerken wird noch, dass wegen

$$y_2 - y = (y^2 - y + p)\,(y^2 + y + p + 1) \tag{2,4}$$

die zweite Iterierte von (1,2) neben den Punkten (2,1) noch die Punkte

$$\tilde{q}_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4} - p}\,, \tag{2,5}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 + y + p + 1 = 0\,, \tag{2,6}$$

als Fixpunkte hat. Die Punkte (2,5) bilden für (2,1) ein zweigliedriges

Zykel, weil die genannten Punkte bei Ausführung von (2,1) miteinander permutiert werden.

Weil der Grenzfall $p = \frac{1}{4}$ schon früher erledigt worden ist, sind die Hauptfälle I und III übrig. Diese Fälle werden nun im Folgenden näher behandelt.

3. Vorbereitende Sätze

3. *Fall* $p > \frac{1}{4}$. Wir beweisen zum Anfang den

Satz 1: *Das Äussere des Kreises*

$$|y| = \sqrt{p+1} \tag{3,1}$$

gehört als ganzes zu D.

Unser Satz gilt sogar für $p \geqq 0$. Dass die rechte Seite von (3,1) nicht verkleinert werden kann, folgt daraus, dass auf der Kreislinie (3,1) die Fixpunkte von y_2 liegen.

Zum Beweis des Satzes hat man die zweite Iterierte von (2,1) zu berücksichtigen, welche nach (1,3) den Ausdruck

$$y_2 = y^4 + 2p\, y^2 + p^2 + p \tag{3,2}$$

hat. Wird hier

$$y = re^{i\varphi}, \qquad y_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}$$

eingesetzt, so bekommt man

$$\begin{aligned} r_2^{\,2} &= r^8 + 4p^2r^4 + (p^2+p)^2 \\ &+ 2pr^2\left\{2r^4 \cos 2\varphi + (p+1)r^2 \cos 4\varphi + 2p(p+1) \cos 2\varphi\right\}. \end{aligned} \tag{3,3}$$

Nun hat die Funktion

$$f(t) = 2r^4t + (p+1)\, r^2\, (2t^2 - 1) + 2p(p+1)\, t \tag{3,4}$$

von $t = \cos 2\varphi$ ihr Minimum für

$$t_0 = -\frac{p(p+1) + r^4}{2(p+1)r^2}. \tag{3,5}$$

Es handelt sich um ein Minimum nur für $|t_0| \leqq 1$, sonst um eine untere Schranke. Somit gilt in jedem Falle

$$r_2^{\,2} \geqq \frac{1}{p+1}\, [r^4 - p(p+1)]^2. \tag{3,6}$$

Ist nun $r^2 > p + 1$, so ist

$$r_2^{\,2} > p + 1 \tag{3,7}$$

und allgemein

$$r_{2n}^{\,2} > p + 1. \tag{3,8}$$

Somit bilden die Funktionen

$$y_{2n}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

als gleichmässig beschränkte Funktionen im Bereich $|y|^2 > p + 1$, eine normale Familie von analytischen Funktionen. Weil nun offenbar für hinreichend grosses n

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n} = \infty\,,$$

so gilt dies auch für $r^2 > p + 1$. Wegen

$$r_{2n+1} > r_{2n}{}^2 - p$$

ist aber dann sogar

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty\,.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

4. Wir behaupten jetzt, dass es einen Kreis

$$(4,1) \qquad |y| < \varepsilon_p \leqq \sqrt{p}$$

gibt, der als ganzes zu D gehört.

Zum Beweis bemerken wir, dass für $y = 0$

$$y_1 = p\,, \quad y_2 = p^2 + p = p_2\,, \ldots, \; y_n = p_n$$

gilt, wo $p_n = G_n(p)$. Nach (1,6) ist

$$p_{n+1} = p_n{}^2 + p\,.$$

Wegen

$$p_{n+1} - p_n = (p_n - \tfrac{1}{2})^2 + (p - \tfrac{1}{4}) > 0$$

bilden die positiven Grössen p_n eine monoton wachsende Folge. Es existiert somit der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p^*\,.$$

Offenbar ist $p^* = \infty$, weil die Gleichung

$$p^* = p^{*2} + p \qquad \text{für } p > \tfrac{1}{4}$$

keine reelle Wurzel besitzt. Wegen der Stetigkeit der durch (1,2) vermittelten Abbildung muss aber dann (3,7) für (4,1) gelten, wo ε_p eine von p abhängige Grösse bezeichnet. Dabei ist

$$(4,2) \qquad \varepsilon_p \leqq \sqrt{p}\,,$$

weil auf der Kreislinie $|y| = \sqrt{p}$ die Fixpunkte von y_1 gelegen sind.

Es gilt somit der

Satz 2: *Das Gebiet D enthält als ganzes einen Kreis*

$$(4,3) \qquad |y| < \varepsilon_p\,,$$

dessen Radius eine von p abhängige Grösse ist, die der Ungleichung (4,2) *genügt.*

Ob in (4,2) das Gleichheitszeichen stets gilt, bleibt hier unentschieden.

5. Wir wollen jetzt, für einen hinreichend grossen Wert von p, eine Abschätzung der Grösse r_2 geben, die zur Untersuchung der Art der Randelemente von D angewandt werden kann.

Wir gehen zu diesem Zweck von der Bemerkung aus, dass (3,5) das Minimum für die rechte Seite von (3,3) nur unter der Bedingung $|t_0| \leqq 1$, also für

$$p + 1 - \sqrt{p+1} \leqq r^2 \leqq p + 1 + \sqrt{p+1} \tag{5,1}$$

gibt, während es sich für die anderen Werte von r, also u.a. für

$$r^2 < p + 1 - \sqrt{p+1}\,, \tag{5,2}$$

nur um eine untere Schranke handelt. In diesem Falle gilt offenbar statt (3,6) die genauere Ungleichung

$$\begin{aligned} r_2^2 &> r^8 + 4p^2 r^4 + (p^2 + p)^2 + 2p\, r^2 f(-1) \\ &= r^8 - 4p\, r^6 + (6p^2 + 2p) r^4 - 4p^2 (p+1) r^2 + p^2 (p+1)^2 = f(r^2)\,. \end{aligned} \tag{5,3}$$

Aus

$$f'(x) = 4(x - p)(x^2 - 2p\, x + p(p+1))$$

geht hervor, dass die rechte Seite von (5,3) als Funktion von $x = r^2$ ihr Minimum für $x = p$ erreicht. Hieraus folgt aber, dass die rechte Seite von (5,3) eine monoton wachsende Funktion von r ist.

Wir fragen jetzt, wann $r = \frac{1}{2}$ gewählt werden kann. Nach (5,2) setzt dies zuerst voraus, dass

$$p + 1 - \sqrt{p+1} > \tfrac{1}{4}\,.$$

Hieraus folgt

$$p \geqq p_0 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} = 0{,}45\,.$$

Wird nun $r = \frac{1}{2}$ in (5,3) gesetzt, so bekommt man

$$r_2^2 > f(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{256} + \frac{p}{16} + \frac{3p^2}{8} + p^3 + p^4 = \psi(p)\,.$$

Ist nun

$$\psi(p) > p + 1\,, \tag{5,4}$$

so gilt nach Satz 1

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \infty\,.$$

Es gilt somit der

Satz 3: *Das Gebiet D enthält sicher als ganzes den Kreis*

$$|y| \leqq \tfrac{1}{2}\,,$$

wenn $\psi(p) > p + 1$. *Diese Bedingung ist z.B. für* $p \geqq 1$ *erfüllt.*

4. Untersuchung des Randes von D

6. Nach dem Obigen liegt der Rand C von D als ganzes im Kreisringe

$$\varepsilon_p < |y| < \sqrt{p+1}\,, \tag{6,1}$$

wo $\varepsilon_p \leqq \sqrt{p}$.

Betreffs der Elemente von C kann man nun folgendes beweisen.

Satz 4: *Der Rand von D besteht aus einer diskreten, im Kreisringe* (6,1) *liegenden Punktmenge, wenigstens, wenn*

$$\psi(p) > p + 1\,. \tag{6,2}$$

Es sei P ein beliebiges Element von C. Nach der allgemeinen Theorie der Iterationen gibt es dann eine unendliche Folge von geschlossenen, im Gebiet D liegenden Kurven

$$C_1\,,\ C_2\,,\ C_3\,,\ldots\,, \tag{6,3}$$

wo allgemein C_{n+1} innerhalb C_n gelegen ist und aus C_n durch die inverse Operation $y_{-1} = \sqrt{y-p}$ erhalten wird, wobei ferner C_n für $n \to \infty$ gegen P konvergiert. Weil nun die Kurven (6,3) von einem gewissen Index n_0 ab im Ringe (6,1) liegen, so gilt auf C_n für $n \geqq n_0$

$$\left|\frac{dy_{-1}}{dy}\right| = \frac{1}{2\,|y_{-1}|} < \varepsilon < 1\,.$$

Für die Länge $|C_n|$ von C_n gilt somit die Abschätzung

$$|C_n| = \int\limits_{C_{n-1}} \frac{ds}{2\,|y_{-1}|} < \varepsilon\,|C_{n-1}|\,.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} |C_n| = 0\,,$$

womit bewiesen ist, dass P aus einem Punkt besteht, wie behauptet wurde.

Ob sämtliche Elemente von C schon für $p > \frac{1}{4}$ punktförmig sind, bleibt hier unentschieden.

7. *Fall* $-2 < p < \frac{1}{4}$. Ist erstens

$$-\tfrac{3}{4} < p < \tfrac{1}{4}\,, \tag{7,1}$$

so hat die Funktion y_1 nach Nr 2 in q_2 einen attraktiven Fixpunkt.

Nach der allgemeinen Theorie besteht C jetzt aus einer im allgemeinen unendlichen Menge von geschlossenen Kurven, deren genauere Untersuchung hier bei seite gelassen wird. Speziell für $p = 0$ besteht D aus dem Äusseren des Kreises $|y| = 1$.

Betrachten wir jetzt das Intervall

(7,2) $$-2 < p < -\tfrac{3}{4}\,.$$

Aus dem Ausdruck (2,5) der Fixpunkte von y_2 ergibt sich für ihren gemeinsamen Multiplikator der Ausdruck

(7,3) $$s' = 4\tilde{q}_1\,\tilde{q}_2 = 4(p+1)\,.$$

Ist nun $4(p+1) < 1$, also

(7,4) $$-\tfrac{5}{4} < p < -\tfrac{3}{4}\,,$$

so sind die genannten Fixpunkte attraktiv. Man hat hier wieder mit einem Gebiet D zu tun, dessen Rand wie im Falle (7,1) nichtausgeartete Kurven enthält.

Dies gilt wahrscheinlich auch für die Werte des Intervalles

(7,5) $$-2 < p < -\tfrac{5}{4}\,.$$

Ohne dies hier nachweisen zu können, machen wir zur Begründung unserer Vermutung folgende Bemerkungen.

8. Es seien

(8,1) $$x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\,,\; x_{2^n}$$

die endlichen Fixpunkte der n:ten Iterierten y_n von (1,2). Nach (1,4) besteht dann die Gleichung

(8,2) $$\prod_{\nu=1}^{2^n} x_\nu = G_n(p)\,.$$

Die Fixpunkte (8,1) bilden nun eine endliche Anzahl Zyklen von y_1. Sind

(8,3) $$\pi_1\,,\; \pi_2\,,\; \ldots\,,\; \pi_m$$

die zugehörigen Teilprodukte, also

(8,4) $$\pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_m = G_n(p)\,,$$

so genügen die zugehörigen Multiplikatoren der Gleichung

$$s_1\,s_2 \ldots s_m = 2^{2^n}\,G(p)\,.$$

Ist nun

(8,5) $$G_n(p) < \frac{1}{2^{2^n}}\,,$$

so ist wenigstens eine von den Grössen $|s_\nu| < 1$, und die Punkte des zugehörigen Zyklus sind attraktiv für die zugehörige Iterierte von (1,2). Weil nun die Ungleichung (8,5) auf einem Intervall der p-Achse gültig ist, das einen Nullpunkt des Polynoms $G_n(p)$ enthält, wird unser Problem auf die Untersuchung der reellen Wurzeln der Gleichungen

$$G_n(p) = 0 \tag{8,6}$$

zurückgeführt.

Nun ergibt sich aus (1,6)

$$G_{n+1} = G_n^2 - 2 \quad \text{für} \quad p = -2 \tag{8,7}$$

und

$$G_{n+1} = G_n^2 - 1 \quad \text{für} \quad p = -1 \,. \tag{8,8}$$

Wegen $G_1(-2) = -2$ folgt dann aus (8,7)

$$G_n(-2) = 2 \qquad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

und ferner, wegen $G_1(-1) = -1$, aus (8,8)

$$G_{2n}(-1) = 0\,, \quad G_{2n+1}(-1) = -1 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mithin besitzt jedes Polynom $G_n(p)$ wenigstens eine Nullstelle im Intervall

$$-2 < p \leqq -1\,. \tag{8,9}$$

Es ist nun wahrscheinlich, dass die Nullstellen der Polynome $G_n(p)$ auf dem Intervall (8,9) überall dicht liegen. Wird dies einmal bewiesen, so wird auch unser obiges Problem seine endgültige Lösung finden.

Literatur

Fatou, P.: Sur les équations fonctionnelles. - Bull. soc. math. France 47 (1919) et 48 (1920).

Julia, G.: Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles - J. math. pures et appl. (8). 1. (1918).

Myrberg, P. J.: Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géometrique de Gauss-Comptes rendus à l'Acad. des sciences, Paris (1958).

—»— Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels-Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Mathematica 253 (1958).

Gedruckt VI. 1958